EJERCICIOS DEL ESPACIO EUCLÍDEO

1. Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$. Probar que:

$$máx\{|x_i|,\ i = 1,2,...,n\} \leq \|\vec{x}\| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq n\, máx\{|x_i|,\ i = 1,2,...,n\}.$$

¿Qué interpretación geométrica se puede dar al resultado anterior en el caso $n = 2$?

2. Probar que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ se verifica que $\left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \leq \| \vec{x} - \vec{y} \|$.

3. Si $\vec{y} \in E(\vec{x}, \delta)$, $(\delta > 0)$, encontrar $\delta' > 0$ de modo que $E(\vec{y}, \delta') \subset E(\vec{x}, \delta)$.

4. Se denomina distancia entre dos puntos $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ al número real $d(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$. Probar las siguientes propiedades, para cualesquiera $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n$ y $t \in R$.

a) $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$.
b) $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{y}$.
c) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
d) $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$.
e) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y} + \vec{z})$.
f) $d(t\,\vec{x}, t\,\vec{y}) = |t|\, d(\vec{x}, \vec{y})$.

¿Qué interpretación geométrica tienen en R^2 las propiedades d), e) y f)?

Demostrar las siguientes desigualdades o problemas de optimización como aplicación de la desigualdad de Cauchy/Schwarz, (del 5 al 13).

5. Sean x, y, z números reales tales que $2x + 3y + 7z = 14$. Determinar el mínimo valor de $w = x^2 + y^2 + z^2$.

6. Sean x, y, z números reales tales que $4x^2 + 5y^2 + 9z^2 = 100$. Determinar el máximo valor de $v = 2x + \sqrt{5}y + 3z$.

7. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales y n un entero positivo tales que $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$.
Probar que $a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4 \geq n$.

8. Sean $x, y, z > 0$ y $x + y + z = 3$. Determinar el mínimo absoluto de $\Sigma = \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y}$.

9. Sean $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ tales que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Probar que

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + ... + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}(x_{n-2}+x_{n-1}+x_n)} + \frac{x_{n-1}}{x_n(x_{n-1}+x_n+x_1)} + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

10. Hallar enteros positivos $n, k_1, k_2, ..., k_n$ tales que

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = 5n - 4 \quad \text{y} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n} = 1.$$

11. Sean $a, b, c > 0$. Demostrar que $\dfrac{a^3}{b^2} + \dfrac{b^3}{c^2} + \dfrac{c^3}{a^2} \geq \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}$.

12. Probar que para todo $A \subset R^n$, $\operatorname{int}(A) = ext(A^C)$ y $ext(A) = \operatorname{int}(A^C)$.

13. Demostrar que si $\vec{a} \in R^n$ y $\delta > 0$, entonces:

i) $E(\vec{a}, \delta) = \left\{ \vec{x} \in R^n, \| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta \right\}$ es abierto.

ii) $\overline{E}(\vec{a}, \delta) = \left\{ \vec{x} \in R^n, \| \vec{x} - \vec{a} \| \leq \delta \right\}$ es cerrado.

iii) $S(\vec{a}, \delta) = \left\{ \vec{x} \in R^n, \| \vec{x} - \vec{a} \| = \delta \right\}$ es la frontera de $E(\vec{a}, \delta)$ y de $\overline{E}(\vec{a}, \delta)$ y por tanto es un cerrado.

14. Hallar $\operatorname{int}(A), ext(A)$ y $front(A)$, siendo $A = \left\{ (x, y) \in R^2, 4 < x^2 + y^2 < 9 \right\}$ indicando si A es abierto, cerrado o ni abierto ni cerrado.

15. Determinar una sucesión decreciente de abiertos $\{ A_n \}_{n \in N}$ de un espacio euclídeo tal que $C = \bigcap_{n \in N} A_n$ sea un cerrado.

16. Determinar una sucesión creciente de abiertos $\{ A_n \}_{n \in N}$ de un espacio euclídeo tal que $F = \bigcup_{n \in N} A_n$ sea un cerrado.

17. Sean $A, B \in R^n$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Se define $A + B = \left\{ \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \in R^n, \vec{a} \in A, \vec{b} \in B \right\}$.
Probar que:
a) $A + B = \bigcup_{a \in A} \left(\{\vec{a}\} + B \right)$.
b) Si B es abierto, entonces $\{\vec{a}\} + B$ también es abierto.
c) Si B es abierto, entonces $A + B$ también es abierto.

18. Sea $B_n = E\left(\vec{0}, \frac{1}{n}\right)$. Demostrar que:
a) Para cualesquiera $A \subset R^n$ no vacío, $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (A + B_n)$.
b) Si $A \subset R^n$ cerrado no vacío, entonces $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A + B_n)$.

19. Probar de dos formas que el intervalo abierto $(0,1) \subset R$ no es compacto en R.

20. Probar que los dos conjuntos siguientes son compactos:

$$\overline{E}(\vec{a}, \delta) = \left\{ \vec{x} \in R^n, \| \vec{x} - \vec{a} \| \leq \delta \right\} \text{ y } S(\vec{a}, \delta) = \left\{ \vec{x} \in R^n, \| \vec{x} - \vec{a} \| = \delta \right\},$$

donde $\vec{a} \in R^n$ y $\delta > 0$.

21. Probar que todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto y la intersección de compactos es compacto.

22. Se dice que un conjunto S de R^n es convexo si $S = \emptyset$ o si contiene a todos los segmentos cuyos extremos están en S, es decir si $\vec{x}, \vec{y} \in S$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $t\,\vec{x} + (1-t)\,\vec{y} \in S$. probar entonces que:
a) La intersección de una familia cualquiera de convexos es un conjunto convexo.
b) La unión de dos conjuntos convexos ¿Es también otro conjunto convexo?

23. Demostrar que la aplicación $d : R^2 \times R^2 \to R$ definida por
$d(\vec{x}, \vec{y}) = | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |$, siendo $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ es una distancia.
Calcular $E(\vec{0}, 1)$, con $\vec{0} = (0,0)$.

24. Hallar el interior y la frontera de los siguientes subconjuntos de R^2 o de R^3:
a) $A = \left\{ (x, y) \in R^2, 0{,}25 \leq x^2 + y^2 < 1 \right\}$.
b) $B = \left\{ (x, y) \in R^2, |x| \leq 2, |y| \leq 2, x \in Q \right\}$.
c) $C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \in R^2, n, m \in N^* \right\}$.

d) $D = \{(x,y) \in R^2, |y| < x^2, 0 < x < 1\}$,

e) $E = \{(x,y,z) \in R^3, x^2 + 4y^2 + 9z^2 \geq 25\}$.

f) $F = \{(x.y,z) \in R^3, z \geq x^2 + y^2, 0 < x < 1\}$.

25. Estudiar si los siguientes subconjuntos son acotados y en caso afirmativo calcular su diámetro:

a) $A = \{(x,y) \in R^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

b) $B = \{(x,y) \in R^2, x^4 + y^4 < 1\}$.

c) $C = \{(x,y,z) \in R^3, x^2 + y^2 + z^2 = 529\}$.

d) $D = \{(x,y) \in R^2, y = x^3\}$.

e) $E = \left\{ (x,y) \in R^2, x = y = \dfrac{1}{n}, n \in N^* \right\}$.

26. Decidir si los siguientes conjuntos son compactos. Cuando no sean compactos, hallar, si fuera posible, el mínimo compacto que los contenga:

a) $A = \{(x,y) \in R^2, |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$.

b) $B = \{(x,y) \in R^2, xy \leq 1\}$.

c) $C = \{(x,y,z) \in R^3, 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

27. Analizar si los siguientes conjuntos son conexos:

a) $A = \{(x,y) \in R^2, 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.

b) $B = \{(x,y) \in R^2, x^2 - y^2 < 0\}$.

c) $C = \{(x,y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in R^2, 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}$.

d) $D = \{(x,y) \in R^2, x \neq 0\}$.

28. ¿Son entornos del punto $(0,0,0) \in R^3$ los conjuntos siguientes?:

a) $A = \{(x,y,z) \in R^3, x^2 + y^2 + z^2 < 10^{-10000}\}$.

b) $B = \{(x,y,z) \in R^3, x \geq 0\}$.

c) $C = \{(x,y,z) \in R^3, x + y + z < 1\}$

d) $D = \{(x,y,z) \in R^3, x^2 + 4y^2 > 10^{-8}\}$.